



## بسط ماتریس سختی دینامیکی تیر ستون تیموشنکو بر روی بستر الاستیک دوپارامتری

مروارید حاجیان<sup>۱\*</sup>، رضا عطارنژاد<sup>۲</sup>

<sup>\*</sup> دانشجوی دکتری مهندسی عمران-سازه، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران، تهران، ایران

<sup>۲</sup> استاد، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران، تهران، ایران

(hajian.m@ut.ac.ir)

(تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۰۵/۲۲، تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۸/۱۰)

### چکیده

تئوری تیر بر روی بستر الاستیک جایگاه ویژه‌ای در مکانیک سازه‌های دارد. مطالعات بسیاری در این زمینه انجام گرفته شده است و روش‌های عملی ارزشمندی برای تجزیه و تحلیل تیرها بر روی بستر الاستیک به دست آمدند. از سوی دیگر، معادلات حاکم بر حرکت سیستم‌های دینامیکی معمولاً معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند که حل ریاضی آن‌ها دشوار است. روش‌های ماتریسی روش‌های هستند که طبق آن‌ها ساختار پیوسته واقعی با یک مدل معادل متشکل از عناصر ساختاری گسسته با خواص الاستیک و اینرسی شناخته شده قابل بیان به شکل ماتریس جایگزین می‌شود. در این مقاله ابتدا ماتریس سختی دینامیکی تیر ستون تیموشنکو بر روی بستر الاستیک دو پارامتری با در نظر گرفتن بستر میرا (کمک فنر) و میرایی سازه‌ای استخراج شده است. سپس عناصر این ماتریس به صورت تابعی از فرکانس ارتعاش طبیعی و نیروی محوری به سری‌های توانی بسط داده شده‌اند. نتیجه‌ی این بسط به دست آوردن ماتریس‌های سختی، سختی هندسی و جرم تیر مورد نظر و برقرار کردن یک رابطه‌ی ریاضی بین این ماتریس‌ها و ماتریس سختی دینامیکی می‌باشد.

### کلمات کلیدی

تیر تیموشنکو، بستر الاستیک دو پارامتری، ماتریس سختی دینامیکی، بسط ماتریس سختی دینامیکی و ماتریس سختی.



# Expansion of the Dynamic Stiffness Matrix of a Timoshenko Beam-Column on a Two Parameter Elastic Foundation

Morvarid Hajian<sup>1\*</sup>, Reza Attarnejad<sup>2</sup>

<sup>\*1</sup> PhD. candidate, School of civil Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

<sup>2</sup> Professor, School of civil Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

(hajian.m@ut.ac.ir)

(Date of received: 13/08/2023, Date of accepted: 01/11/2023)

## ABSTRACT

The theory of beams on elastic foundation occupies a prominent place in contemporary structural mechanics. The governing equations of motion of dynamic systems are generally partial differential equations that are difficult to solve in mathematical terms. This work is facilitated through the use of matrix methods and modern computational techniques. The matrix methods are based on the concept of replacing the actual continuous structure by an equivalent model made up of discrete structural elements having known elastic and inertial properties expressible in matrix form. The purpose of the present paper is to expand the dynamic stiffness matrix of a Timoshenko beam-column on two-parameter elastic foundation. So, first, a brief review of the literature related to soil-structure interaction is presented. Then, the method of dynamic analysis of the structures with distributed mass and elasticity is discussed. In the discussion, the procedure of derivation of dynamic matrices using exact differential equation of vibration is studied. Afterward, the Timoshenko beam theory which takes into account the effect the rotary inertia of mass and shear distortion can be modeled is presented. Furthermore, foundation model including two-parameter models of elastic foundation are studied, and the governing differential equation of vibration of each presented model is derived. Then, the differential equation of the model is solved in order to derive the dynamic stiffness matrix of a Timoshenko beam-column on two-parameter elastic foundation. Then, expansion of the obtained dynamic matrix is carried out using power series. We use program Mathematica for this purpose. The result of this expansion is a two-variable power series of some useful matrices in terms of vibration frequency and axial force which its coefficients are the relevant first, second and higher order stiffness, geometrical and mass matrices.

## Keywords:

Timoshenko beam, Two-parameter elastic foundation, Dynamic stiffness matrix, Expansion of the dynamic stiffness and stiffness matrix.



## ۱- مقدمه

تحلیل دینامیکی تیرهای تیموشنکو بر روی بستر الاستیک موضوع تعداد قابل ملاحظه‌ای از تحقیقات در زمینه اندرکنش خاک و سازه بوده است. تعداد زیادی از تحقیقات اخیر در رابطه با مسئله ارتعاش تیرهای عمومی شامل تعیین مودهای ارتعاش و فرکانس‌های طبیعی بوده است [۱-۶]. به طور کلی برای حل مسئله دینامیکی ارتعاش تیر دو موضوع باید مشخص شود. موضوع اول انتخاب تئوری تیر مورد نظر است. معادله حرکت حاکم بر ارتعاش یک تیر در تئوری تیر اویلر برنولی با فرض نادیده گرفتن اینرسی دورانی جرم و تغییرشکل‌های برشی به دست آمده است. همچنین همان‌طور که در ادبیات فنی ذکر شده است، این تئوری برای غلبه بر این محدودیت‌ها، رایلی<sup>۱</sup> اثر اینرسی دورانی جرم در ارتعاش تیر را در نظر گرفت و تیموشنکو<sup>۲</sup> اثر تغییرشکل‌های برشی را وارد مسئله کرد. این تئوری تصحیح شده که هم برای مودهای پایین و هم برای مودهای بالا قابل به کارگیری است، تئوری تیر تیموشنکو نامیده می‌شود [۷]. مسئله دومی که باید مورد توجه قرار گیرد، انتخاب یک روش تحلیل می‌باشد. در روش‌های عددی غالباً با تبدیل سازه پیوسته که دارای جرم و الاستیسیته گسترده می‌باشد به یک سازه گسسته تقریباً معادل، تحلیل انجام می‌شود. روش متداول به دست آوردن ماتریس‌های سختی، سختی هندسی و جرم نیز استفاده از توابع شکل استاتیکی می‌باشد. اما این توابع تغییرمکان که در روش اجزاء محدود به کار گرفته می‌شوند، طبیعتاً استاتیکی هستند و برای تعریف رفتار دینامیکی ارتعاش تیر به خصوص در مودهای بالا قابل اطمینان نیستند. در مقابل این روش‌ها، می‌توان معادلات دقیق برای به دست آوردن ضرایب سختی دینامیکی را مورد استفاده قرار داد. روش دقیق براساس معادله دیفرانسیل مربوطه منجر به معادلات جبری - مثلثاتی ارتباط دهنده نیروها و تغییرمکان‌های دو انتهای المان تیر می‌شود که با حل آن‌ها، مسئله به صورت دقیق حل خواهد شد. حال با توجه به این دو مسئله عمده باید ذکر شود که در مقالات منتشر شده پیشین، تحقیقات بسیاری در مورد بکارگیری تئوری تیر تیموشنکو در مسائل مهندسی انجام شده است. روش تیر روی بستر دوپارامتری در چند دهه اخیر مورد مطالعه زیادی قرار گرفته است. ویداد و همکاران<sup>۳</sup> در مطالعه خود اثرات غیرهمگن بودن خاک را در ارتعاش آزاد تیر اویلر- برنولی روی بستر دوپارامتری بررسی کردند. این محققین ناهمگن بودن خاک را با تعریف متغیر بودن بستر دوپارامتری در زیر تیر در نظر گرفتند [۸]. بودا و همکاران<sup>۴</sup> مدل اجزای محدود تیر روی بستر دوپارامتری با خاک لایه‌ای را بررسی کردند. در این مطالعه خاک و تیر خطی و همگن فرض شدند [۹]. ملاپودی<sup>۵</sup> یک فرمولاسیون جدید برای پی سطحی در مدل وینکلر<sup>۶</sup> ارائه کرده است [۱۰]. اثرات ناهمگنی و بستر دوپارامتری در پاسخ تیرهای دو سر مفصل در مطالعه آکوار<sup>۷</sup> بررسی شده است [۱۱]. فرویو و ریزی<sup>۸</sup> پاسخ خمشی یک تیر اویلر - برنولی روی بستر وینکلر با سختی غیرهمگن خطی را به صورت استاتیکی و حل تئوری بررسی کردند [۱۲]. ملاپودی و ایوب<sup>۹</sup> با استفاده از مدل ولاسوف و پسترناک، مدل اجزای محدود برای تیر روی بستر دوپارامتری ارائه دادند [۱۳]. آبارا<sup>۱۰</sup> در مطالعه خود پایداری و ارتعاش آزاد تیر اویلر برنولی و تیر تیموشنکو روی بستر دو پارامتری الاستیک با شرایط تکیه‌گاهی کلی را به صورت حل تئوری بررسی کرده است [۱۴]. چن و همکاران<sup>۱۱</sup> از توابع شکل درجه

<sup>1</sup> Rayleigh

<sup>2</sup> Timoshenko

<sup>3</sup> Widad *et al.*

<sup>4</sup> Boudaa *et al.*

<sup>5</sup> Mullapudi

<sup>6</sup> Winkler

<sup>7</sup> Acvar

<sup>8</sup> Froio and Rizzi

<sup>9</sup> Mullapudi and Ayoub

<sup>10</sup> Obara

<sup>11</sup> Chen *et al.*



پنجم برای مدل‌سازی تیر روی بستر الاستیک تک پارامتری استفاده کردند [۱۵]. آیواز<sup>۱۲</sup> در مطالعه خود به بررسی ارتعاش آزاد تیر روی بستر الاستیک با استفاده از مدل ولاسوف پرداخته است و اثرات عمق خاک را در مقادیر فرکانس سیستم بررسی کرده است [۱۶]. در یک مطالعه، رابطه‌ای جدید برای مدول وینکلر بستر خاک که وابسته به مدول الاستیسیته و نسبت پواسن خاک است، به دست آمده است. این رابطه براساس یکسان بودن مقادیر حداکثر خیز تیر و لنگر خمشی که با استفاده از تئوری محیط پیوسته و مدل‌سازی مدل جرم متمرکز به دست آمده است [۱۷]. ما و همکاران<sup>۱۳</sup> ارتعاش آزادی غیرخطی تیر روی بستر وینکلر را با در نظر گرفتن حرکت جرم خاک به دست آوردند [۱۸]. همچنین باید یادآور شد که ماتریس سختی تیر تیموشنکو در برخی مسائل بسیار مفید می‌باشد. به همین دلیل ما در این مقاله از این تئوری تیر استفاده می‌کنیم. از سوی دیگر در مورد روش تحلیل باید متذکر شد که ماتریس سختی دینامیکی تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر توسط چن<sup>۱۴</sup> با استفاده از معادله دیفرانسیل دقیق حاکم بر ارتعاش تیر مذکور به دست آمده است [۱۹-۲۰]. در مقاله حاضر سعی شده با تعمیم دادن روش چن از فرمولاسیون دقیق برای بستر دو پارامتری استفاده شود. علاوه بر مطالب فوق، پاز<sup>۱۵</sup> برای به دست آوردن ماتریس‌های سختی، سختی هندسی و جرم روشی جدید ابداع کرده است. در این روش پس از بسط دادن المان‌های ماتریس سختی دینامیکی با استفاده از سری‌های توانی نشان داده می‌شود که جملات مرتبه اول حاصل از این بسط همان ماتریس‌های سازه‌ای مورد نظر هستند. ماتریس‌های درجات دوم و بالاتر را نیز با ادامه دادن بسط سری می‌توان به دست آید [۲۱-۲۳]. در مقاله حاضر ابتدا ماتریس سختی تیر ستون تیموشنکو بر روی بستر الاستیک دو پارامتری به دست آورده می‌شود. سپس براساس روش پاز این ماتریس عمومی با استفاده از سری‌های توانی بسط داده می‌شود. بدین ترتیب ماتریس‌های سختی، سختی هندسی و جرم مسئله مورد نظر بدون استفاده از تابع شکل به دست می‌آید. در ضمن یک رابطه ریاضی بین ماتریس سختی دینامیکی حاصل از معادله دیفرانسیل دقیق و ماتریس‌های سازه‌ای حاصل از روش اجزاء محدود برقرار می‌شود.

## ۲- ماتریس سختی عمومی

### ۲-۱- اثر $P-\Delta$

ابتدا یک المان از تیر ستون تحت تغییرشکل‌های خمشی و برشی را در نظر می‌گیریم. شکل ۱ تغییرشکل این المان را به صورت گام به گام نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، اثر  $P-\Delta$  نیروی محوری در حضور تغییرشکل‌های برشی برابر خواهد بود با:

$$dM = N \frac{dy}{dx} dx = Ndy \quad (1)$$

$$dy = \frac{dy}{dx} dx = (\alpha + \beta) dx \quad (2)$$

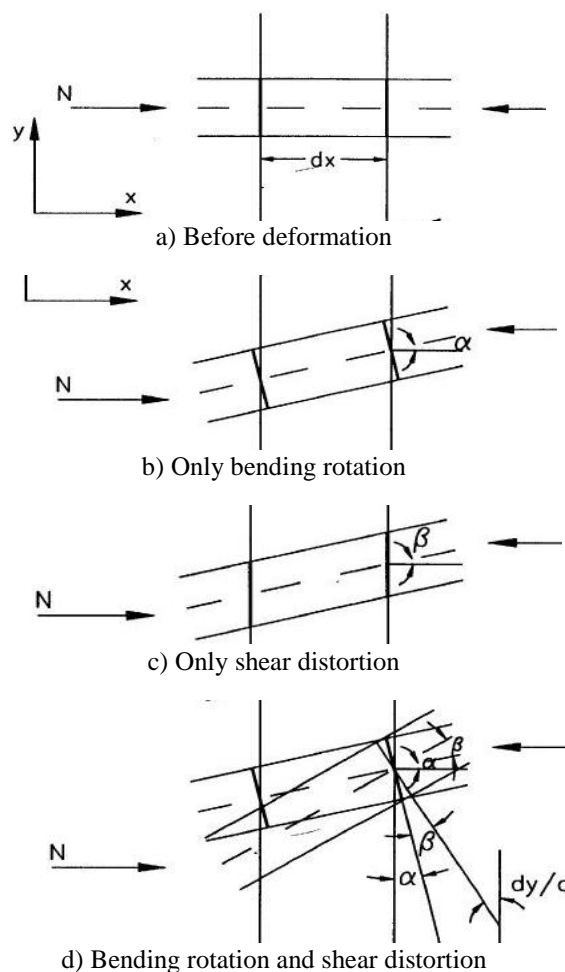
که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب دوران‌های خمشی و برشی هستند.

<sup>12</sup> Ayvaz

<sup>13</sup> Ma et al.

<sup>14</sup> Chen

<sup>15</sup> Paz

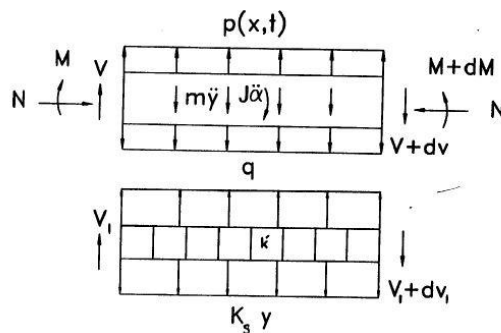


شکل ۱: تغییر شکل‌های یک المان تیر - ستون.

### ۲-۲- معادله حرکت

یک تیر ستون تیموشنکو بر روی بستر الاستیک دو پارامتری را در نظر بگیرید. شکل ۲ یک المان دیفرانسیلی از این تیر ستون تحت نیروها و لنگرهای وارده را نشان می‌دهد. با نوشتن معادله تعادل لایه بررسی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = q - k_s y - c_d \ddot{y} \quad (3)$$



شکل ۲: نیروهای وارد بر یک المان.

که در آن اندرکنش نامعلوم بین تیر و بستر و  $k_s$  سختی فنرهای وینکلر می‌باشند. با استفاده از تئوری مقدماتی تیرها داریم:

$$V_1(x, t) = -k_1 A_1 G_1 \beta_1 \quad (4)$$

که در آن  $k_1 A_1 G$  و  $G_1$  سطح مؤثر برشی و مدول برشی لایه برشی می‌باشند. همچنین  $k_1 A_1 G$  به عنوان  $k_g$  که پارامتر دوم بستر می‌باشد تعریف می‌شود. رابطه‌ی سینماتیکی بین تغییرشکل برشی  $\beta_1$  و خیز  $y$  به صورت زیر است:

$$\beta_1 = \frac{dy}{dx} \quad (5)$$

با جایگزینی معادلات ۴ و ۵ در معادله ۳ رابطه زیر به دست می‌آید:

$$q = k_s y - k_g \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + c_d \ddot{y} \quad (6)$$

از سوی دیگر با توجه به معادله ۱، معادلات تعادل تیر ستون به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = p(x, t) - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - q(x, t) \quad (7)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V + J \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - N \frac{\partial y}{\partial x} \quad (8)$$

که در آن‌ها  $V$ ،  $M$ ،  $N$  بیانگر خیز تیر، ممان خمشی، نیروی برشی و نیروی ثابت محوری،  $P$ ،  $q$ ،  $m$  و  $J$  نشان دهنده نیروی خارجی، واکنش بستر دو پارامتری، جرم و اینرسی دورانی جرم واحد طول تیر می‌باشند. براساس تئوری تیر، نیروی برشی  $V$  و ممان خمشی  $M$  را می‌توان به صورت زیر بر حسب توابع تغییرشکل نوشت:



$$V(x,t) = -k'AG\bar{G}\beta \quad (9)$$

$$M(x,t) = \bar{E}I \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad (10)$$

که در آن  $\alpha$  لنگر خمشی،  $\bar{E}$  و  $\bar{G}$  مدولهای یانگ و برشی مصالح تیر،  $I$  ممان دوم سطح مقطع تیر و سایر پارامترها مشابه قبل هستند. مدولهای  $\bar{E}$  و  $\bar{G}$  را می توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$\bar{E} = E(I + i\omega\delta) \quad (11)$$

$$\bar{G} = G(I + i\omega\eta) \quad (12)$$

که در آن  $\omega$  فرکانس ارتعاش،  $E$  و  $G$  مدولهای یانگ و برشی واقعی مصالح و  $\delta$  و  $\eta$  ضرایب ناشی از استهلاک سازه‌ای هستند. بار دیگر رابطه‌ی سینماتیکی بین  $y$ ،  $\beta$  و  $\alpha$  مورد نیاز می‌باشد. این رابطه به صورت معادله است:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha + \beta \quad (13)$$

با استفاده از معادلات ۶، ۹، ۱۰ و ۱۳ معادلات ۷ و ۸ می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شوند:

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k'AG \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = p(x,t) \quad (14)$$

$$EI \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - k'AG \left( \alpha - \frac{\partial y}{\partial x} \right) - J \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + N \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

معادلات قبل نماینگر معادلات درگیر حرکت برای ارتعاش عرضی تیر ستون تیمونشکو بر روی بستر الاستیک دو پارامتری با لحاظ کردن اثرات بستر میرا و میرایی سازه‌ای می‌باشد. با جایگذاری  $\alpha$  از معادله ۱۴ در معادله ۱۵ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - p + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - mr^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \\ \frac{EI}{k'AG} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( p - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) - \\ \frac{mr^2}{k'AG} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( p - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) + N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

### ۲-۳- حل معادله دیفرانسیل

هدف این مقاله بسط دادن ماتریس سختی دینامیکی تیر ستون تیمونشکو بر روی بستر الاستیک دوپارامتری و به دست آوردن ماتریس‌های سختی، سختی هندسی و جرم مربوط می‌باشد. به همین دلیل از اثرات بستر میرا (کمک فنر) و میرایی سازه‌ای صرف نظر می‌شود. در غیر این صورت بسط مذکور بسیار پیچیده و سخت خواهد بود. برای حل معادلات دیفرانسیل درگیر ۱۴ و ۱۵، لازم است



که روش جداسازی متغیرها به کار گرفته شود. برای ارتعاش هارمونیک دائمی جابجایی  $y$  و دوران  $\alpha$  را می توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$y(x,t) = \phi(x)e^{i\omega t} \quad (17)$$

$$\alpha(x,t) = \psi(x)e^{i\omega t} \quad (18)$$

که در آن  $\omega$  بیانگر فرکانس ارتعاش و  $\phi$  و  $\psi$  اشکال مودی هستند. با استفاده از معادلات ۱۷ و ۱۸ معادلات حرکت ۱۴ و ۱۵ به صورت زیر بازنویسی می شوند:

$$\phi^{IV} + a\phi'' + b\phi = 0 \quad (19)$$

$$\psi^{IV} + a\psi'' + b\psi = 0 \quad (20)$$

که

$$a = cd + f + hd \quad (21)$$

$$b = cdf \quad (22)$$

$$c = \frac{m\omega^2 - k_s}{k'AG} \quad (23\text{-الف})$$

$$d = \frac{k'AG}{k_g + k'AG} \quad (23\text{-ب})$$

$$f = \frac{J\omega^2 - k'AG}{EI} \quad (23\text{-ج})$$

$$h = \frac{k'AG + N}{EI} \quad (23\text{-د})$$

معادلات ۱۹ و ۲۰ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه چهارم یکسانی هستند که جوابهای آنها به صورت معادلات ۲۴ برای  $\phi(x)$  و ۲۵ برای  $\psi(x)$  هستند:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^4 C_i e^{p_i x} \quad (24)$$

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^4 D_i e^{p_i x} \quad (25)$$

که  $C_i$  ها و  $D_i$  ها ضرایب مختلط و ها شماره موج مختلط می باشند. جایگزینی معادلات ۲۴ و ۲۵ در معادلات ۱۹ و ۲۰ مقادیر را به دست می دهد.





$$p_i = \pm \left\{ \frac{1}{2} \left[ -a \pm \sqrt{a^2 - 4b} \right] \right\}^{1/2} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (26)$$

همچنین جایگزینی معادلات ۲۴ و ۲۵ در معادلات ۱۸ رابطه بین  $C_i$  ها و  $D_i$  ها را بیان می کند.

$$D_i = g_i C_i \quad (27)$$

$$g_i = \frac{p_i}{d} + \frac{c}{p_i} \quad (28)$$

چهار مجهول با استفاده از شرایط مرزی تیر تعیین می شوند. برای آسان تر شدن فرمولاسیون، لازم است به این نکته توجه شود که:

$$g_4 = -g_3 \quad g_2 = -g_1 \quad p_4 = -p_3 \quad p_2 = -p_1 \quad (29)$$

همچنین با استفاده از معادلات ۲۱ و ۲۲ و ۲۶ و ۲۸ به آسانی می توان رابطه زیر را به دست آورد.

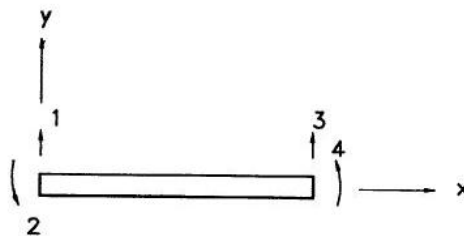
$$p_1 p_3 g_1 g_3 = \frac{b - acd + c^2 d^2}{d^2} = -\frac{k'AG}{EI} c \quad (30)$$

#### ۴-۲- ماتریس سختی دینامیکی

دامنه تغییرمکان های گرهی دو انتهای تیر همانطور که در شکل ۳ نشان داده شده است، می تواند بر حسب ضرایب  $C_i$  به صورت زیر بیان شود.

$$\begin{Bmatrix} \phi(0) \\ \psi(0) \\ \phi(L) \\ \psi(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ g_1 & -g_1 & g_3 & -g_3 \\ e^{p_1 x} & e^{-p_1 x} & e^{p_3 x} & e^{-p_3 x} \\ g_1 e^{p_1 x} & -g_1 e^{-p_1 x} & g_3 e^{p_3 x} & -g_3 e^{-p_3 x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

$$\{\Delta\} = [P]\{C\} \quad (32)$$



شکل ۳: درجات آزادی المان تیر-ستون.

نیروهای گرهی دو انتهای تیر نیز با استفاده از معادلات ۹ و ۱۰ می تواند بر حسب تغییرمکان های گرهی به صورت زیر نوشته شود.



$$\{F\} = \begin{Bmatrix} V(0) \\ -M(0) \\ -V(l) \\ M(l) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k'AG(\psi(0) - \phi'(0)) \\ -EI\psi'(0) \\ -k'AG(\psi(l) - \phi'(l)) \\ EI\psi'(l) \end{Bmatrix} \quad (33)$$

با جایگذاری معادلات ۲۴ و ۲۵ در معادله ۳۲ رابطه ۳۳ به دست می‌آید.

$$\{F\} = [L]\{C\} \quad (34)$$

در نهایت با استفاده از معادلات ۳۱ و ۳۳، ماتریس سختی دینامیکی تیر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\{F\} = [K]\{\Delta\} \quad (35)$$

$$\{K\} = [L][P]^{-1} \quad (36)$$

با انجام عملیات ماتریس‌های سمت راست معادله ۲۵ ضرایب سختی مستقیماً حاصل خواهند شد. در ابتدا ماتریس سختی حاصل به نظر نامتقارن می‌آید. ولی این ماتریس را می‌توان با استفاده از اتحاد زیر متقارن کرد.

$$\begin{aligned} -k'AG(p_1g_3 - p_3g_1) &= EIg_1g_3(p_1^2 - p_3^2) \\ &= EIg_1g_3(p_1g_1 - p_3g_3) \end{aligned} \quad (37)$$

رابطه فوق را می‌توان با استفاده از معادلات ۲۸ و ۲۹ ثابت کرد. ماتریس سختی دینامیکی تیر ستون تیموشنکو بر روی بستر الاستیک دوپارامتری که از رابطه ۳۵ به دست می‌آید به صورت زیر خواهد بود.

$$[S] = \frac{EI}{D} \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{34} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & N_{34} \\ N_{41} & N_{42} & N_{43} & N_{44} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} D &= (g_1 - g_3)^2 \left[ e^{(p_1 - p_3)l} + e^{-(p_1 + p_3)l} \right] \\ &\quad - (g_1 + g_3)^2 \left[ e^{(p_1 - p_3)l} + e^{-(p_1 + p_3)l} \right] + 8g_1g_3 \\ N_{11} &= N_{33} = g_1g_3(p_1g_1 - p_3g_3) \times \\ &\quad \left\{ (g_1 - g_3) \left[ e^{(p_1 + p_3)l} - e^{-(p_1 + p_3)l} \right] + (g_1 + g_3) \left[ e^{(p_1 - p_3)l} - e^{-(p_1 - p_3)l} \right] \right\} \\ N_{12} &= N_{21} = -N_{34} = -N_{43} = \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} &g_1g_3 \left\{ \begin{aligned} &-4(p_1g_1 + p_3g_3) + (p_1 - p_3)(g_1 - g_3) \times \left[ e^{(p_1 - p_3)l} - e^{-(p_1 + p_3)l} \right] + \\ &(p_1 + p_3)(g_1 + g_3) \times \left[ e^{(p_1 - p_3)l} - e^{-(p_1 - p_3)l} \right] \end{aligned} \right\} \\ N_{22} &= N_{44} = (p_1g_1 - p_3g_3) \times \\ &\left\{ (g_1 - g_3) \left[ e^{(p_1 + p_3)l} - e^{-(p_1 + p_3)l} \right] - (g_1 + g_3) \left[ e^{(p_1 - p_3)l} - e^{-(p_1 - p_3)l} \right] \right\} \end{aligned}$$



$$N_{13} = N_{31} = -2g_1g_3(p_1g_1 - p_3g_3) \left[ g_1(e^{p_1l} - e^{-p_1l}) - g_3(e^{p_3l} - e^{-p_3l}) \right]$$

$$N_{23} = N_{32} = -N_{14} = -N_{41} =$$

$$-2g_1g_3(p_1g_1 - p_3g_3) \left[ (e^{p_1l} + e^{-p_1l}) - (e^{p_3l} + e^{-p_3l}) \right]$$

$$N_{24} = N_{42} = 2(p_1g_1 - p_3g_3) \left[ g_3(e^{p_1l} - e^{-p_1l}) - g_1(e^{p_3l} - e^{-p_3l}) \right]$$

### ۳- بحث در خصوص جواب‌های معادله دیفرانسیل

در این بخش، همان‌طور که گفته شد حل معادله دیفرانسیل تیر - ستون تیموشنکو بر روی بستر دو پارامتری منجر به دو معادله دیفرانسیل خطی درجه چهار می‌شود:

$$\phi^{IV} + b\phi'' + b\phi = 0 \quad (۱۹-تکراری)$$

$$\psi^{IV} + a\psi'' + b\psi = 0 \quad (۲۰-تکراری)$$

واضح است که علامت  $a$  و  $b$  روی حل این روابط اثر می‌گذارد. بنابراین حالت‌های مختلف برای حل معادله از رابطه‌ی ۲۶ به دست می‌آید. در ابتدا به عبارت زیر توجه می‌کنیم:

$$a^2 - 4b = (cd - f)^2 + (hd) \times \left[ \left( \frac{k'AG + N}{EI} \right) d + 2 \left( \frac{m\omega^2 - k_s}{k_g + k'AG} \right) + 2 \left( \frac{J\omega^2 - k'AG}{EI} \right) \right] \quad (۴۰)$$

این عبارت همواره بزرگ‌تر از صفر است، بنابراین عبارت  $-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}$  همواره مقادیر حقیقی دارد. بدین ترتیب سه حالت وجود خواهد داشت:  
حالت اول -

$$-a - \sqrt{a^2 - 4b} < 0 \quad \text{و} \quad -a + \sqrt{a^2 - 4b} > 0 \quad (۴۱)$$

در این حالت  $p_1$  و  $p_2$  هر دو حقیقی هستند و  $p_3$  و  $p_4$  اعداد مختلط هستند.

$$p_3 = -p_4 = ir_2 \quad \text{و} \quad p_1 = -p_2 = r_1 \quad (۴۲)$$

با ضرب کردن نامساوی‌های رابطه ۴۱ در همدیگر،  $b < 0$  به دست می‌آید. بنابراین زمانی که  $b$  منفی باشد، دو جواب  $p_i$  حقیقی و دو جواب  $p_i$  مختلط می‌شوند.

حالت دوم -

$$-a + \sqrt{a^2 - 4b} > 0 \quad \text{و} \quad -a - \sqrt{a^2 - 4b} > 0 \quad (۴۳)$$



در این حالت هر چهار  $p_i$  اعداد حقیقی هستند.

$$p_3 = -p_4 = r_2 \quad \text{و} \quad p_1 = -p_2 = r_1 \quad (44)$$

با ضرب کردن نامساوی‌های رابطه ۴۳ در همدیگر،  $b > 0$  ،  $a < 0$  به دست می‌آید. بنابراین زمانی که  $b$  مثبت و  $a$  منفی باشد، چهار جواب  $p_i$  حقیقی می‌شوند.

حالت سوم-

$$-a + \sqrt{a^2 - 4b} < 0 \quad \text{و} \quad -a - \sqrt{a^2 - 4b} < 0 \quad (45)$$

در این حالت هر چهار  $p_i$  اعداد مختلط هستند.

$$p_3 = -p_4 = ir_2 \quad \text{و} \quad p_1 = -p_2 = ir_1 \quad (46)$$

با ضرب کردن نامساوی‌های رابطه ۴۵ در همدیگر،  $b > 0$  ،  $a < 0$  به دست می‌آید. مطابق با مطالب قبل در تمامی حالات  $p_i$  ها یا حقیقی با مختلط خالص هستند. بنابراین مربع آن‌ها همواره حقیقی می‌باشد. بنابراین عبارت  $\frac{1}{d} + \frac{c}{p_i^2}$  در رابطه‌ی ۲۸ همواره یک عدد حقیقی است. بدن ترتیب  $g_i$  ها از ضرب  $p_i$  ها در اعداد حقیقی به دست می‌آیند. اگر  $p_i$  حقیقی باشد،  $g_i$  هم حقیقی خواهد بود و اگر  $p_i$  مختلط باشد،  $g_i$  هم مختلط خواهد بود. خلاصه مطالب فوق را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} b < 0 & \quad p_1 = -p_2 = r_1 \quad p_3 = -p_4 = ir_2 \\ & \quad g_1 = -g_2 = s_1 \quad g_3 = -g_4 = is_2 \\ b > 0 \quad a < 0 & \quad p_1 = -p_2 = r_1 \quad p_3 = -p_4 = ir_2 \\ & \quad g_1 = -g_2 = s_1 \quad g_3 = -g_4 = is_2 \\ b > 0 \quad a < 0 & \quad p_1 = -p_2 = ir_1 \quad p_3 = -p_4 = ir_2 \\ & \quad g_1 = -g_2 = is_1 \quad g_3 = -g_4 = is_2 \end{aligned} \quad (47)$$

#### ۴- بسط سری توانی عناصر ماتریس

بعد از به دست آوردن ماتریس سختی دینامیکی دقیق تیر ستون تیموشنکو بر روی بستر الاستیک دو پارامتری عناصر این ماتریس با استفاده از سری‌های توانی بسط داده می‌شوند تا ثابت شود که جملات مرتبه اول بسط حاصل، دقیقاً ضرایب سختی، سختی هندسی و جرمی هستند که در روش‌های متداول از جمله روش اجزاء محدود سعی در به دست آوردن آن‌ها داریم. در این بسط ریاضی، عملیات جبری بر روی سری‌های توانی شامل جمع، تفریق، ضرب و تسیم به کار گرفته می‌شوند. اعتبار این عملیات جبری و همگرایی سری‌های حاصل توسط ناپ<sup>۱۶</sup> ثابت شده است [۲۴]. به طور کلی، سری‌های همگرا می‌توانند با یکدیگر جمع، تفریق و یا ضرب شوند و سری‌های حاصل از این عملیات نیز حداقل در ناحیه مشترک همگرایی سری‌های اولیه همگرا خواهند بود. عملیات

<sup>16</sup> Knopp



تقسیم دو سری توانی نیز می‌تواند به صورت عادی انجام شود. اگرچه مسئله تعیین شعاع همگرایی سری حاصل به آسانی موارد قبلی نیست، این مسئله نیاز به بکارگیری قضایایی از تئوری متغیرهای مختلط دارد. به طور مختصر می‌توان گفت که سری توانی حاصل از تقسیم دو سری توانی همگرا حول نقطه مختلط در دایره‌ای به مرکز  $Z_0$  و شعاع نزدیک‌ترین نقطه به  $Z_0$  در صفحه مختلط تابعی که به وسیله سری مخرج مشخص می‌شود، همگراست. به منظور بسط دادن عناصر ماتریس سخی دینامیکی، ابتدا صورت و مخرج این عناصر باید به صورت تابعی از فرکانس ارتعاش و نیروی محوری بیان شوند. با استفاده از معادلات ۲۱، ۲۲ و ۲۳ دو پارامتر  $a$  و  $b$  می‌توانند به صورت زیر بازنویس شوند:

$$a = \left( \frac{k'AG + N}{EI} \right) d + \left( \frac{m\omega^2 - k_s}{k_g + k'AG} \right) d + \quad (21\text{-تکراری})$$

$$\left( \frac{J\omega^2 - k'AG}{EI} \right) d$$

$$b = \left( \frac{m\omega^2 - k_s}{k_g + k'AG} \right) \left( \frac{J\omega^2 - k'AG}{EI} \right) d \quad (22\text{-تکراری})$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود،  $a$  و  $b$  برای مقادیر بزرگ بزرگ‌تر از صفر هستند. بنابراین معادله ۲۶ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$p_1 = i r_1 \quad (48)$$

$$p_3 = i r_3 \quad (49)$$

$$r_1 = \left\{ \frac{1}{2} \left[ a - \sqrt{a^2 - 4b} \right] \right\}^{1/2} \quad (50)$$

$$r_3 = \left\{ \frac{1}{2} \left[ a + \sqrt{a^2 - 4b} \right] \right\}^{1/2} \quad (51)$$

به طور مشابه با توجه به معادله ۲۸ می‌توانند به صورت زیر بازنویسی شوند.

$$g_1 = i d_1 \quad (52)$$

$$g_3 = i d_3 \quad (53)$$

$$d_1 = \frac{r_1}{d} - \frac{c}{r_1} \quad (54)$$

$$d_3 = \frac{r_3}{d} - \frac{c}{r_3} \quad (55)$$

حال با توجه به روابط فوق، مسیر بسط دادن هموار است. اگر به این معادلات توجه شود مشاهده می‌شود که عناصر ماتریس سختی دینامیکی مورد نظر را می‌توان به صورت تابعی از فرکانس ارتعاش طبیعی و نیروی محوری نوشت. برای مثال المان ردیف دوم، ستون اول از ماتریس مورد نظر را در نظر می‌گیریم.

$$S_{21} = EI \frac{N_{21}}{D} \quad (56)$$



$$N_{21} = g_1 g_3 \{-4(p_1 g_1 + p_3 g_3) + (p_1 - p_3)(g_1 - g_3) \times [e^{(p_1 - p_3)l} - e^{-(p_1 + p_3)l}] + (p_1 + p_3)(g_1 + g_3) \times [e^{(p_1 - p_3)l} - e^{-(p_1 - p_3)l}]\} \quad (57)$$

$$N_{21} = (g_1 - g_3)^2 [e^{(p_1 + p_3)l} + e^{-(p_1 + p_3)l}] - (g_1 + g_3)^2 [e^{(p_1 - p_3)l} + e^{-(p_1 - p_3)l}] + 8g_1 g_3 \quad (58)$$

با استفاده از معادلات ۲۱، ۲۲، ۴۸ تا ۵۶،  $N_{21}$  و  $D$  را می‌توان به توابعی از  $N$ ،  $\omega$  و در نتیجه آماده برای بسط دادن تبدیل کرد. اما انجام عملیات ریاضی مربوط به بسط به سری توانی با دست عملاً غیرممکن است. به همین دلیل برای انجام این عملیات از برنامه ریاضی *Mathematica* استفاده می‌شود. بسط المان  $S_{21}$  ماتریس سختی دینامیکی نتیجه‌ای به صورت زیر خواهد داشت:

$$S_{21} = K_{21} - G_{21}N - M_{21}\omega^2 - M'_{21}\omega^4 + \dots \quad (59)$$

برای مثال فقط یک بخش از سری نشان داده شده با  $K_{21}$  به صورت رابطه شماره ۶۰ است:

$$K_{21} = \left\{ EI \left( \frac{k'AG}{EI} \right) \left( 1 - \frac{k'AGL^2}{12EI} + \left( \frac{k'AGL^2}{12EI} \right)^2 - \left( \frac{k'AGL^2}{12EI} \right)^3 + \left( \frac{k'AGL^2}{12EI} \right)^4 - \dots \right) \right\} + \dots \quad (60)$$

با تعریف  $\phi = \frac{12EI}{k'AGL^2}$  این قسمت از  $K_{21}$  به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$K_{21} = \left\{ \frac{6EI}{L^2} \left( \frac{1}{\phi} \right) \left( 1 - \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} - \frac{1}{\phi^3} + \frac{1}{\phi^4} - \dots \right) \right\} + \dots \quad (61)$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \quad (62)$$

بنابراین:

$$1 - \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^3} - \frac{1}{\phi^3} + \frac{1}{\phi^4} - \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} \quad (63)$$

$$K_{21} = \frac{6EI}{L^2} \left( \frac{1}{\phi} \right) \left( \frac{\phi}{1+\phi} \right) + \dots = \frac{6EI}{L^2} \left( \frac{1}{1+\phi} \right) + \dots \quad (64)$$



باید این نکته را متذکر شد که این بخش از سختی فقط در اثر سختی تیر است. عوامل دیگر به وجود آورنده سختی بستر وینکلر و لایه برشی می‌باشند. بعد از به دست آوردن نتایج با استفاده از رایانه و انجام حجم بسیار زیادی از عملیات ساده سازی نتیجه نهایی به صورت زیر خواهد بود.

$$[S] = [K] - [G]N - [M]\omega^2 - [A_1]N\omega^2 - [G_1]N^2 - [M_1]\omega^4 - \dots \quad (65)$$

که در این رابطه  $[K]$ ،  $[G]$  و  $[M]$  به ترتیب ماتریس‌های سختی، سختی هندسی و جرم می‌باشند. ماتریس‌های مرتبه‌های دوم و بالاتر را می‌توان با ادامه عملیات بسط به دست آورد. این ماتریس‌ها در ضمیمه نشان داده شده‌اند.

### ۵- جمع بندی و نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا نشان داده شده است که در صورت در نظر گرفتن اثر نیروی محوری بر خمش تیر، تغییر شکل‌های برشی نیز باید در نظر گرفته شوند. این موضوع توسط بعضی از محققین پیشین در نظر گرفته نشده است. سپس با استفاده از معادله دقیق حاکم بر ارتعاش تیر، ماتریس سختی دینامیکی تیر ستون تیموشکنو بر روی بستر الاستیک دوپارامتری به دست آمد. بعد از آن، این ماتریس با استفاده از سری‌های توانی بسط داده شد. در نتیجه‌ی این بسط به دست آوردن ماتریس‌های سختی، سختی هندسی و جرم بدون استفاده از توابع شکل بود. استقلال این ماتریس‌ها از توابع تغییر مکان دارای اهمیت زیادی است. به علاوه، نتیجه مهم دیگر از انجام این تحقیق این است که با توجه به رابطه ریاضی برقرار شده، ملاحظه می‌شود که عبارات  $[K] - \omega^2[M]$  که به کرات در تحلیل‌های دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد، فقط یک تقریب مرتبه اول از ماتریس سختی دینامیکی تیر است و این عبارت به خصوص برای مودهای بالای ارتعاش می‌تواند با استفاده از ماتریس‌های مرتبه دوم تصحیح شود.

### ۶- مراجع

- 1- Valsangkar, A. J. and Pradhanang, R., 1988, **Vibrations of beam- columns on two-parameter elastic foundations**, Earthquake engineering & structural dynamics, 16, 2, 217-225.
- 2-De Rosa, M. A., 1995, **Free vibrations of Timoshenko beams on two-parameter elastic foundation**, Computers & Structures, 57, 1, 151-156.
- 3-Yokoyama, T., 1996, **Vibration analysis of Timoshenko beam-columns on two-parameter elastic foundations**, Computers & Structures, 61, 6, 995-1007.
- 4- Eisenberger, M. and Clastornik, J., 1987, **Beams on variable two-parameter elastic foundation**, Journal of Engineering Mechanics, 113, 10, 1454-1466.
- 5- Zhaohua, F. and Cook, R. D., 1983, **Beam elements on two-parameter elastic foundations**, Journal of Engineering Mechanics, 109, 6, 1390-1402.
- 6-Naidu, N. R. and Rao, G. V., 1995, **Vibrations of initially stressed uniform beams on a two-parameter elastic foundation**, Computers & structures, 57, 5, 941-943.
- 7- Timoshenko, S. P., Goodier, J. N., 1970, **Theory of Elasticity**, Third Edition, McGrawHill Book Company, Singapore, 567 pp



- 8- Widad, B., Salah, K. and Souad, B., 2019, **Soil non-homogeneity and soil-structure interaction effects on beam vibrations**, Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings, 1-10.
- 9- Boudaa, S., Khalfallah, S. and Bilotta, E., 2019, **Static interaction analysis between beam and layered soil using a two-parameter elastic foundation**, International Journal of Advanced Structural Engineering, 11, 1, 21-30.
- 10- Mullapudi, T. R. S., 2010, **Nonlinear finite element formulation of the soil structure interaction through two-parameter foundation model**.
- 11- Avcar, M., 2016, **Effect of material non-homogeneity and two-parameter elastic foundation on fundamental frequency parameters of Timoshenko beam**, Acta Phys Pol A , 130, 375–378.
- 12-Froio, D. and Rizzi, E., 2017, **Analytical solution for the elastic bending of beams lying on a linearly variable Winkler support**, International Journal of Mechanical Sciences, 128, 680-694.
- 13- Mullapudi, R. and Ayoub, A., 2010, **Nonlinear finite element modeling of beams on two-parameter foundations**, Computers and Geotechnics, 37, 3, 334-342.
- 14- Obara, P., 2014, **Vibrations and stability of Bernoulli-Euler and Timoshenko beams on two-parameter elastic foundation**, Archives of Civil Engineering, 60, 4, 421-440.
- 15- Chen, J., Feng, Y. and Shu, W., 2016, **An improved solution for beam on elastic foundation using quintic displacement functions**, KSCE Journal of Civil Engineering, 20, 2, 792-802.
- 16- Ayvaz, Y. and Özgan, K., 2002, **Application of modified Vlasov model to free vibration analysis of beams resting on elastic foundations**, Journal of Sound and vibration, 255, 1, 111-127.
- 17- Basudhar, P. K., Yadav, S. K. and Basudhar, A., 2018, **Treatise on Winkler modulus of subgrade reaction and its estimation for improved soil–structure interaction analysis**, Geotechnical and Geological Engineering, 36, 5, 3091-3109.
- 18- Ma, J., Liu, F., Nie, M. and Wang, J., 2018, **Nonlinear free vibration of a beam on Winkler foundation with consideration of soil mass motion of finite depth**, Nonlinear Dynamics, 92, 2, 429-441.
- 19- Winkler, E., 1867, **Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit: mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik für polytechnische Schulen**, Bauakademien, Ingenieur, Maschinenbauer, Architekten, etc (Vol. 1). Dominicus.
- 20- Chen, Y. H., 1987, **General dynamic-stiffness matrix of a timoshenko beam for transverse vibrations**, Earthquake engineering & structural dynamics, 15, 3, 391-402.
- 21- Paz, M. and Kim, Y. H., 1991, **Structural dynamics**, Springer.
- 22- Paz, M. and Dung, L., 1975, **Power series expansion of the general stiffness matrix for beam elements**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 9, 2, 449-459.
- 23- Paz, M., 1973, **Mathematical observations in structural dynamics**, Computers & Structures, 3, 2, 385-396.
- 24- Knopp, K., 1990, **Theory and application of infinite series**, Courier Corporation.





ضمیمه

- ماتریس سختی حاصل از سختی تیر

$$[K_b] = \frac{EI}{l^3(1+\varphi)} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & (4+\varphi)l^2 & -6l & (2-\varphi)l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & (2-\varphi)l^2 & -6l & (4+\varphi)l^2 \end{bmatrix}$$

- ماتریس سختی حاصل از سختی بستر وینکلر

$$[K_s] = \frac{k_l}{(1+\varphi)^3} \begin{bmatrix} \left(\frac{13}{35} + \frac{7\varphi}{10} + \frac{\varphi^2}{3}\right) l & \left(\frac{11}{210} + \frac{11\varphi}{120} + \frac{\varphi^2}{24}\right) l & \frac{9}{70} + \frac{3\varphi}{10} + \frac{\varphi^2}{6} & -\left(\frac{13}{420} + \frac{3\varphi}{40} + \frac{\varphi^2}{24}\right) l \\ \left(\frac{11}{210} + \frac{11\varphi}{120} + \frac{\varphi^2}{24}\right) l & \left(\frac{1}{105} + \frac{\varphi}{60} + \frac{\varphi^2}{120}\right) l^2 & -\left(\frac{13}{420} + \frac{3\varphi}{40} + \frac{\varphi^2}{24}\right) l & -\left(\frac{1}{140} + \frac{\varphi}{60} + \frac{\varphi^2}{120}\right) l^2 \\ \frac{9}{70} + \frac{3\varphi}{10} + \frac{\varphi^2}{6} & -\left(\frac{13}{420} + \frac{3\varphi}{40} + \frac{\varphi^2}{24}\right) l & \frac{13}{35} + \frac{7\varphi}{10} + \frac{\varphi^2}{3} & -\left(\frac{11}{210} + \frac{11\varphi}{120} + \frac{\varphi^2}{24}\right) l \\ -\left(\frac{13}{420} + \frac{3\varphi}{40} + \frac{\varphi^2}{24}\right) l & -\left(\frac{1}{140} + \frac{\varphi}{60} + \frac{\varphi^2}{120}\right) l^2 & -\left(\frac{11}{210} + \frac{11\varphi}{120} + \frac{\varphi^2}{24}\right) l & -\left(\frac{1}{105} + \frac{\varphi}{60} + \frac{\varphi^2}{120}\right) l^2 \end{bmatrix}$$

- ماتریس سختی حاصل از سختی لایه برشی

$$[K_s] = \frac{k_s}{l(1+\varphi)^3} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} + 2\varphi + \varphi^2 & \frac{1}{10}l & -\left(\frac{6}{5} + 2\varphi + \varphi^2\right) & \frac{1}{10}l \\ \frac{1}{10}l & \left(\frac{2}{15} + \frac{\varphi}{6} + \frac{\varphi^2}{12}\right) l^2 & -\frac{1}{10}l & -\left(\frac{1}{30} + \frac{\varphi}{6} + \frac{\varphi^2}{12}\right) l^2 \\ -\left(\frac{6}{5} + 2\varphi + \varphi^2\right) & -\frac{1}{10}l & \frac{6}{5} + 2\varphi + \varphi^2 & -\frac{1}{10}l \\ \frac{1}{10}l & -\left(\frac{1}{30} + \frac{\varphi}{6} + \frac{\varphi^2}{12}\right) l^2 & -\frac{1}{10}l & \left(\frac{2}{15} + \frac{\varphi}{6} + \frac{\varphi^2}{12}\right) l^2 \end{bmatrix}$$

- ماتریس سختی هندسی گسترده

$$[G] = \frac{N}{l(1+\varphi)^3} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} + 2\varphi + \varphi^2 & \frac{1}{10}l & -\left(\frac{6}{5} + 2\varphi + \varphi^2\right) & \frac{1}{10}l \\ \frac{1}{10}l & \left(\frac{2}{15} + \frac{\varphi}{6} + \frac{\varphi^2}{12}\right) l^2 & -\frac{1}{10}l & -\left(\frac{1}{30} + \frac{\varphi}{6} + \frac{\varphi^2}{12}\right) l^2 \\ -\left(\frac{6}{5} + 2\varphi + \varphi^2\right) & -\frac{1}{10}l & \frac{6}{5} + 2\varphi + \varphi^2 & -\frac{1}{10}l \\ \frac{1}{10}l & -\left(\frac{1}{30} + \frac{\varphi}{6} + \frac{\varphi^2}{12}\right) l^2 & -\frac{1}{10}l & \left(\frac{2}{15} + \frac{\varphi}{6} + \frac{\varphi^2}{12}\right) l^2 \end{bmatrix}$$



- ماتریس جرم حاصل از جرم تیر

$$[M_c] = \frac{ml}{(1+\varphi)^3} \begin{bmatrix} \frac{13}{35} + \frac{7\varphi}{10} + \frac{\varphi^2}{3} & \left(\frac{11}{210} + \frac{11\varphi}{120} + \frac{\varphi^2}{24}\right)l & \frac{9}{70} + \frac{3\varphi}{10} + \frac{\varphi^2}{6} & -\left(\frac{13}{420} + \frac{3\varphi}{40} + \frac{\varphi^2}{24}\right)l \\ \left(\frac{11}{210} + \frac{11\varphi}{120} + \frac{\varphi^2}{24}\right)l & \left(\frac{1}{105} + \frac{\varphi}{60} + \frac{\varphi^2}{120}\right)l^2 & -\left(\frac{13}{420} + \frac{3\varphi}{40} + \frac{\varphi^2}{24}\right)l & -\left(\frac{1}{140} + \frac{\varphi}{60} + \frac{\varphi^2}{120}\right)l^2 \\ \frac{9}{70} + \frac{3\varphi}{10} + \frac{\varphi^2}{6} & -\left(\frac{13}{420} + \frac{3\varphi}{40} + \frac{\varphi^2}{24}\right)l & \frac{13}{35} + \frac{7\varphi}{10} + \frac{\varphi^2}{3} & -\left(\frac{11}{210} + \frac{11\varphi}{120} + \frac{\varphi^2}{24}\right)l \\ -\left(\frac{13}{420} + \frac{3\varphi}{40} + \frac{\varphi^2}{24}\right)l & -\left(\frac{1}{140} + \frac{\varphi}{60} + \frac{\varphi^2}{120}\right)l^2 & -\left(\frac{11}{210} + \frac{11\varphi}{120} + \frac{\varphi^2}{24}\right)l & -\left(\frac{1}{105} + \frac{\varphi}{60} + \frac{\varphi^2}{120}\right)l^2 \end{bmatrix}$$

- ماتریس جرم حاصل از اینرسی دورانی جرم گسترده تیر

$$[M] = \frac{J}{l(1+\varphi)^3} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \left(\frac{1}{10} - \frac{\varphi}{2}\right)l & -\frac{6}{5} & \left(\frac{1}{10} - \frac{\varphi}{2}\right)l \\ \left(\frac{1}{10} - \frac{\varphi}{2}\right)l & \left(\frac{2}{15} + \frac{\varphi}{6} - \frac{\varphi^2}{3}\right)l^2 & -\left(\frac{1}{10} - \frac{\varphi}{2}\right)l & -\left(\frac{1}{30} + \frac{\varphi}{6} - \frac{\varphi^2}{6}\right)l^2 \\ -\frac{6}{5} & -\left(\frac{1}{10} - \frac{\varphi}{2}\right)l & \frac{6}{5} & -\left(\frac{1}{10} - \frac{\varphi}{2}\right)l \\ \left(\frac{1}{10} - \frac{\varphi}{2}\right)l & -\left(\frac{1}{30} + \frac{\varphi}{6} - \frac{\varphi^2}{6}\right)l^2 & -\left(\frac{1}{10} - \frac{\varphi}{2}\right)l & \left(\frac{2}{15} + \frac{\varphi}{6} - \frac{\varphi^2}{3}\right)l^2 \end{bmatrix}$$